Physique Générale : Mécanique

11.01: Cinématique du solide

Sections
SC, GC & SIE , BA1

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Version du 15.12.2024

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Aujourd'hui

- Solide indéformable
- Centre de masse: du cas discret au cas continu
- Intermède sur les intégrales multiples
- Détermination du centre de masse d'un solide
  - Exemple: demi-sphère
- Vitesse et accélération en tout point du solide
- Mouvement instantané du solide
- Mouvements particuliers
- Formule de composition des rotations
- Angles d'Euler

Solide indéformable

Définition: **Solide indéformable.**
Ensemble infini de points matériels tels que la distance entre deux points qui le composent est constante au cours du temps, quel que soit le mouvement de l'ensemble.

- Le solide indéformable est un modèle mathématique, valable si les déformations que tout corps solide subit sous l'action des forces externes à l'échelle microscopique sont très petites par rapport aux dimensions macroscopiques du solide.

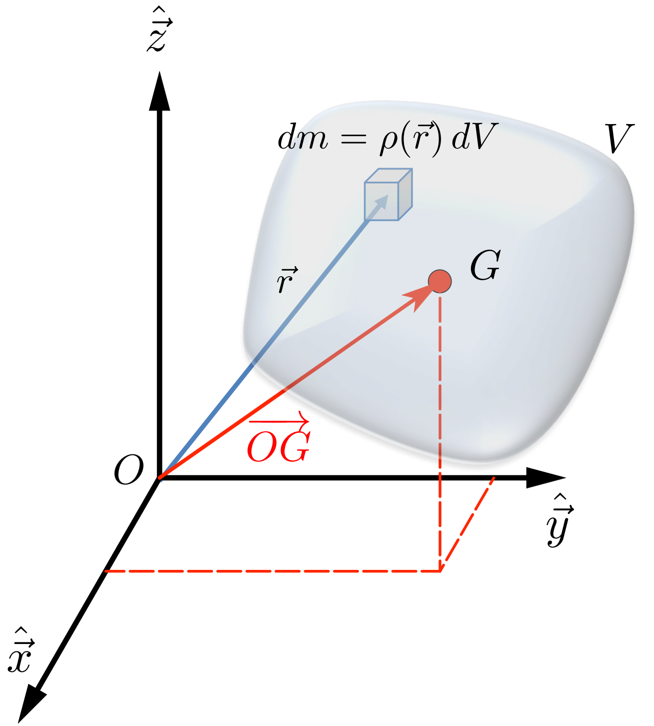
Centre de masse du solide

- Système de points matériels discrets

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

- Cas continu (solide)

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\, dm(\vec{r}) = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, dV}$$



$$M = \text{masse du solide} \quad [\mathrm{kg}]$$

$$V = \text{volume du solide} \quad [\mathrm{m}^3]$$

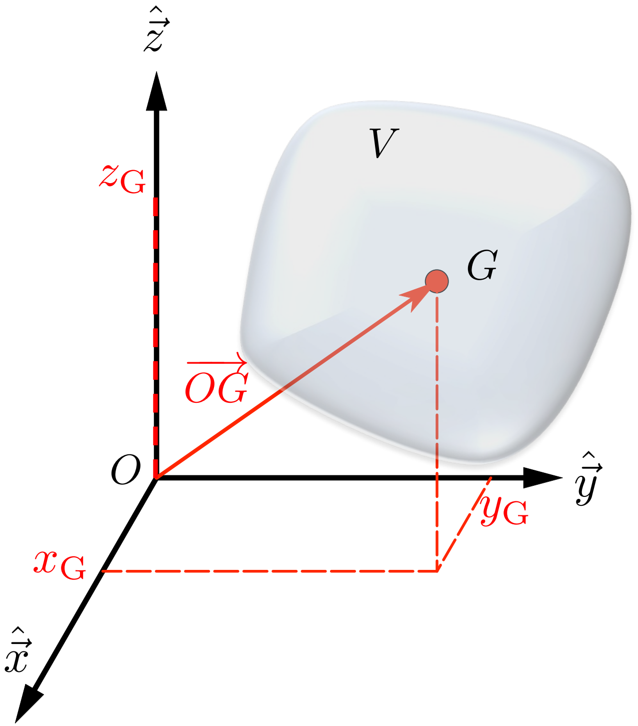
$$\rho(\vec{r}) = \text{masse volumique} \quad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

Coordonnées du centre de masse

$$x_G = \frac{1}{M}\int_V x\ \rho(x,y,z)dV$$
$$y_G = \frac{1}{M}\int_V y\ \rho(x,y,z)dV$$
$$z_G = \frac{1}{M}\int_V z\ \rho(x,y,z)dV$$

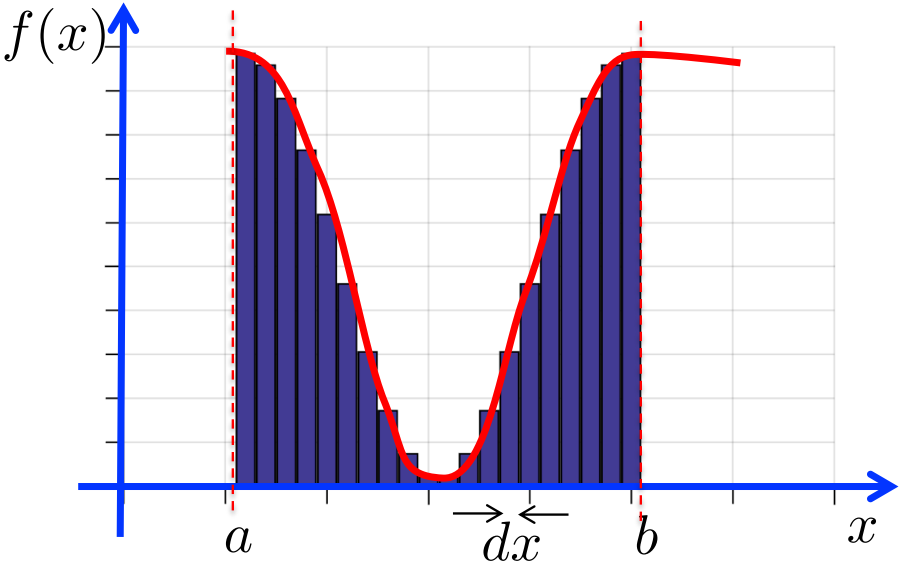
- Si le solide est homogène:

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{\rho}{M}\int_V \vec{r}\,dV = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,dV}$$



Intermède sur les intégrales multiples

A une dimension:



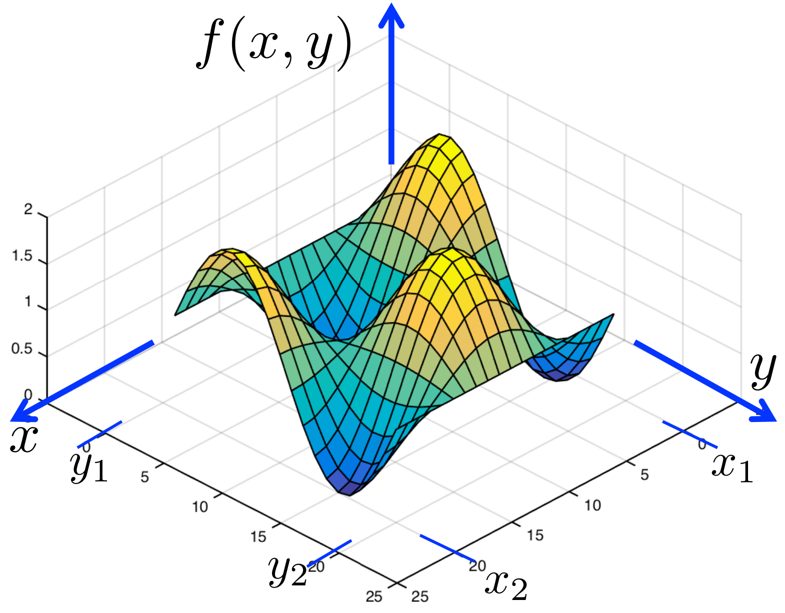
$$\int_a^b f(x)dx$$

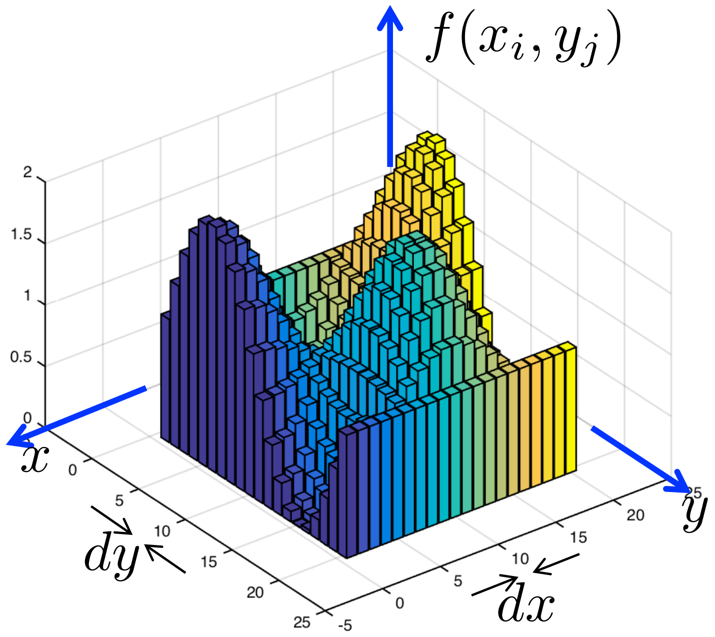
$$= F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\simeq \sum_i f(x_i)dx$$

Intermède sur les intégrales multiples

- A deux dimensions:





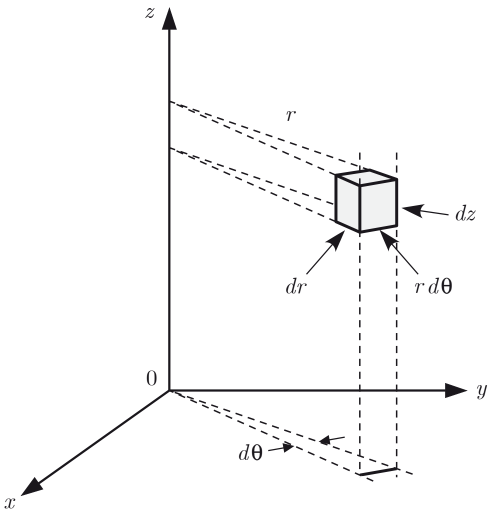
$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dx\,dy \simeq \sum_i\left[\sum_j f(x_i,y_j)\,dy\right]dx$$

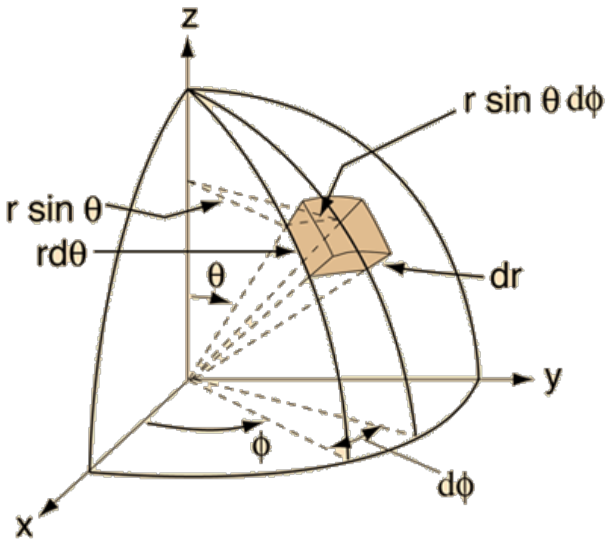
$$= \qquad dx\,dy:\ \text{élément de surface} \qquad =$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy \simeq \sum_j\left[\sum_i f(x_i,y_j)\,dx\right]dy$$

Intermède sur les intégrales multiples

- A trois dimensions: idem, mais plus compliqué à représenter.
- Coordonnées cartésiennes: l'élément de volume est: $dx\,dy\,dz$





- Coordonnées cylindriques:

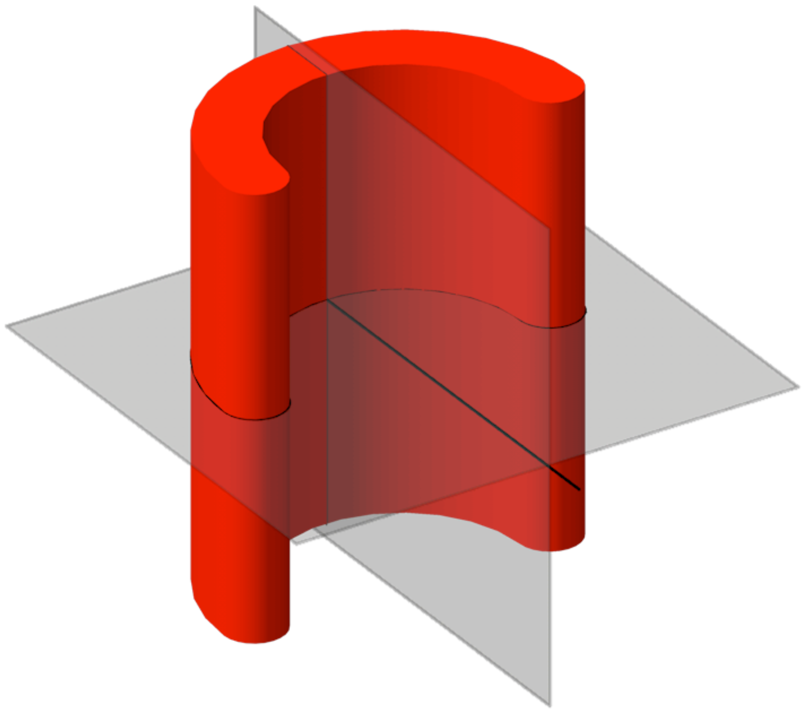
$$dV = r d\theta\, dr\, dz$$

- Coordonnées sphériques:

$$\begin{aligned} dV &= r d\theta \;\; r \sin\theta d\phi \;\; dr \\ &= r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \end{aligned}$$

Détermination du centre de masse

- Le centre de masse d’un solide homogène (de densité uniforme) se trouve sur les éventuels plans/axes de symétrie de celui-ci.

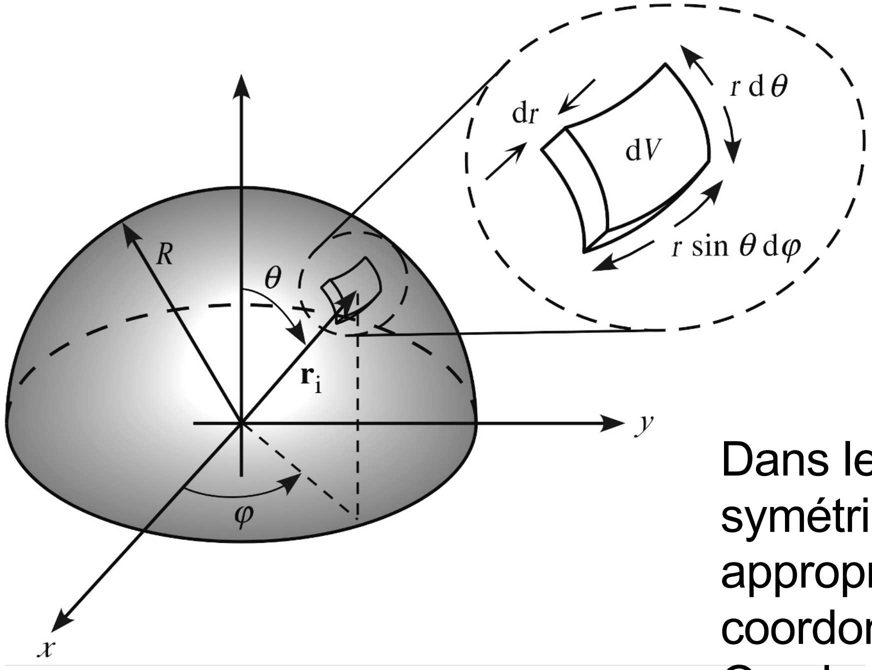


- Si on intervertit les parties qui se trouvent de part et d’autre du plan de symétrie, le solide ne change pas de forme et le CM doit donc se trouver dans le plan de symétrie

- De même, si l’on tourne le solide autour d’un axe de symétrie, il reste inchangé et le CM doit donc être sur l’axe.

- Conseil: pour déterminer le CM, on place donc judicieusement l’origine du système de coordonnées.

Exemple: Calcul du centre de masse d'une demi-sphère homogène



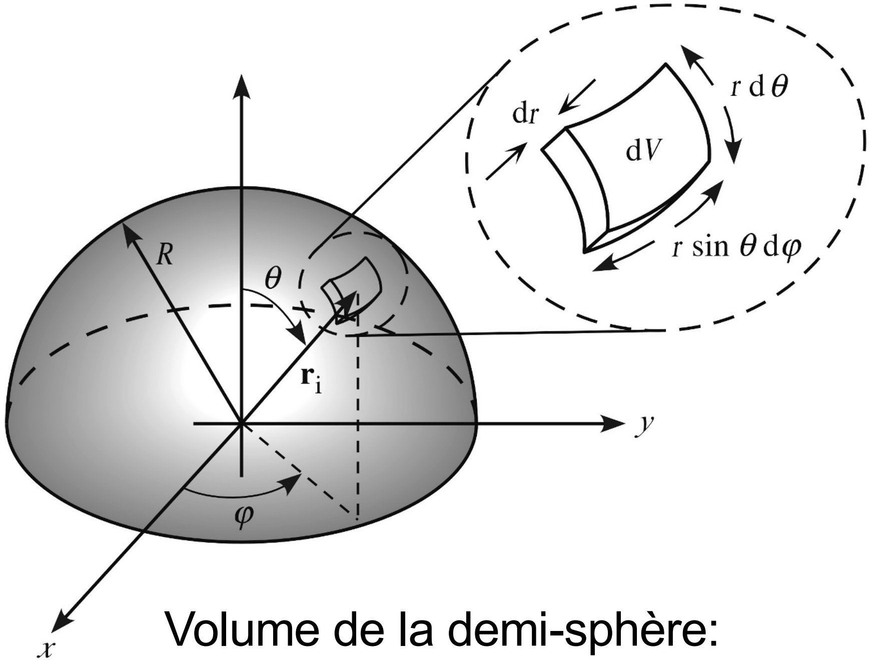
Lorsque c'est possible, on tire parti de la symétrie du système et on choisit le système de coordonnées et son origine dans le but de simplifier les calculs.

Dans le cas présent, le système présente une symétrie axiale d'axe z et les coordonnées appropriées sont de toute évidence les coordonnées sphériques.
On place donc l'origine du repère au centre du plan de base de la demi-sphère et on cherche un centre de masse situé sur l'axe z.

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

Exemple: Calcul du centre de masse d'une demi-sphère homogène



Coordonnées sphériques.

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Pour une demi-sphère

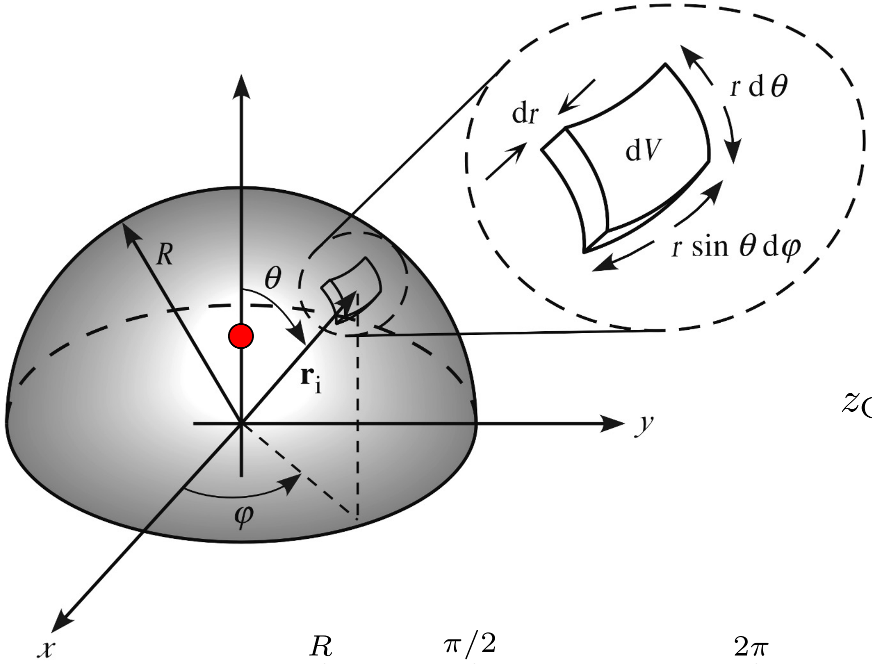
$$\theta \in [0, \pi/2], \quad r \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Volume de la demi-sphère:

$$V = \int_V dV = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^R \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Exemple: Calcul du centre de masse d'une demi-sphère homogène



Demi-sphère homogène

$$\rho = \frac{M}{V}$$

En tirant parti de la symétrie, il suffit de calculer la position en z du CM:

$$z_\mathrm{G} = \frac{1}{M}\int_V z\,\rho(x,y,z)\,dV = \frac{1}{V}\int_V z\,dV$$

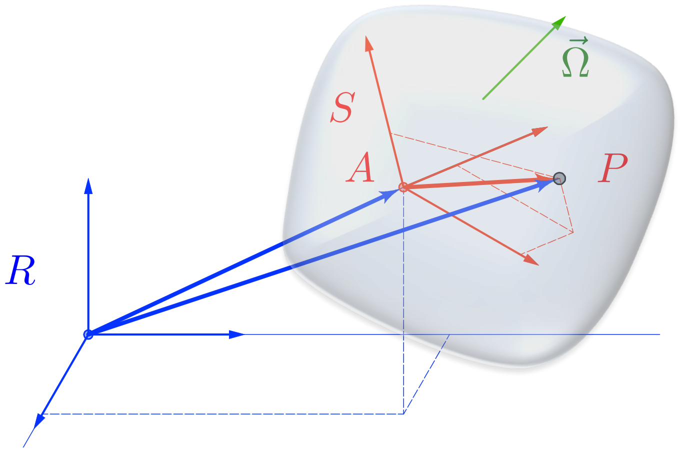
$$z = r\,\cos\theta$$

$$z_\mathrm{G} = \frac{1}{V}\int_0^R r^3\,dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$z_\mathrm{G} = \frac{1}{V}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2\pi R^3}\,\frac{R^4}{4}\,\frac{1}{2}\,2\pi = \frac{3}{8}R$$

- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

Vitesse en tout point d'un solide



On reprend la formule de la vitesse d'un point P dans un référentiel accéléré et on utilise la propriété que la vitesse relative est nulle. (indice a : absolu, indice r: relatif)

$$\vec{v}_a(P) = \vec{v}_a(A) + \vec{v}_r(P) + \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP}\right)$$

$$\vec{v}_r(P) = 0$$

$$\boxed{\vec{v}_a(P) = \vec{v}_a(A) + \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP}\right)}$$

$A, P \in \text{solide}$

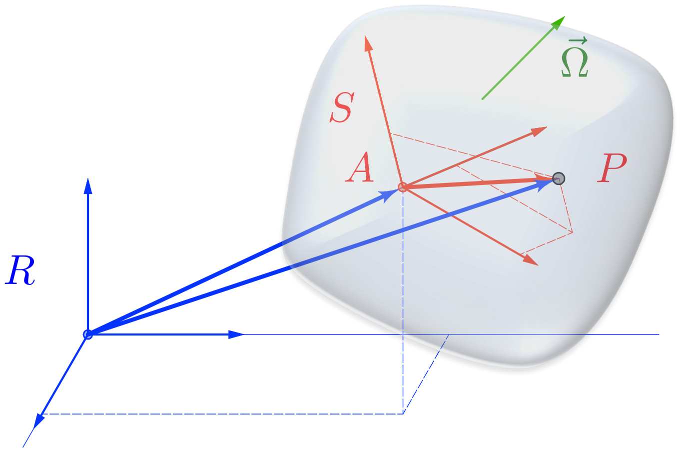
Vitesse en tout point du solide

En particulier, si $A = G$

$$\boxed{\vec{v}_a(P) = \vec{v}_a(G) + \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{GP}\right)}$$

G :centre de masse

Accélération en tout point d'un solide



Même démarche que pour la vitesse, en tenant compte que l'accélération relative est également nulle

$$\vec{a}_a(P) = \vec{a}_a(A) + \vec{a}_r(P) + 2\left(\vec{\Omega} \times \vec{v}_r(P)\right) + \left(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP})\right) + \left(\dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{AP}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_a(P) = \vec{a}_a(A) + \left(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP})\right) + \left(\dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{AP}\right)}$$

En particulier, si $A = G$

$$\boxed{\vec{a}_a(P) = \vec{a}_a(G) + \left(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{GP})\right) + \left(\dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{GP}\right)}$$

Mouvement instantané d'un solide

- Soit A un point quelconque du solide:

$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}}$ $\forall P \in \text{solide}$ où = $\vec{\Omega}$ vitesse instantanée de rotation du solide

- Le <u>mouvement instantané</u> du solide est l'un des quatre suivants:

$\vec{\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}_A = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_P = 0 \quad \forall P$ **Solide au repos**

$\vec{\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}_A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_A \neq 0 \quad \forall P$ **Solide en translation**

$\vec{\Omega} \neq 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}_A \cdot \vec{\Omega} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_P \cdot \vec{\Omega} = 0 \quad \forall P$ **Solide en rotation d'axe parallèle à $\vec{\Omega}$**

$\vec{\Omega} \neq 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}_A \cdot \vec{\Omega} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_P \cdot \vec{\Omega} \neq 0 \quad \forall P$ **Solide en mouvement helicoïdal (rotation d'axe $\parallel \vec{\Omega}$ + translation $\parallel \vec{\Omega}$)**

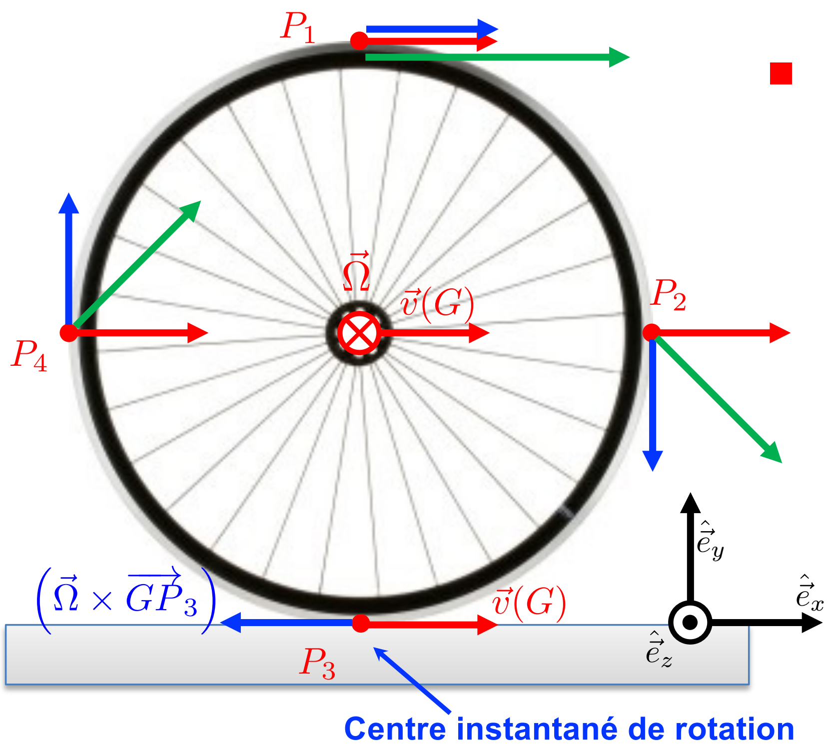
Mouvement plan-sur-plan

Définition: **Mouvement plan-sur-plan.**
Mouvement tel qu'un plan du solide S reste à tout moment parallèle à un plan fixe π du référentiel

Remarques:

- A tout instant les vitesses de tous les points du solide sont parallèles au plan fixe π.
- Le vecteur instantané de rotation est perpendiculaire à π.
- on est ramené à l'étude du mouvement d'une surface plane rigide Σ (section de S) sur un plan π;
- dans ce plan, il y a un centre instantané de rotation (si $\omega \neq 0$)
- Lieu géométrique des centres instantanés de rotation:
  - dans le référentiel lié à Σ : **la base**
  - dans le référentiel lié à π : **la roulante**

Mouvement plan-sur-plan
Roue de vélo sur un plan sans glissement.



- Une roue de vélo de rayon D se déplace sans glisser sur le sol. On a un mouvement plan-sur-plan car le plan de la roue est toujours parallèle à un plan fixe du référentiel du labo.

$$\vec{\Omega} = -\frac{2\pi}{T}\hat{\vec{e}}_z$$

T : Durée d'un tour de roue

$$\vec{v}(G) = \frac{2\pi R}{T}\,\hat{\vec{e}}_x = \Omega R\,\hat{\vec{e}}_x$$

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(G) + \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{GP}\right)$$

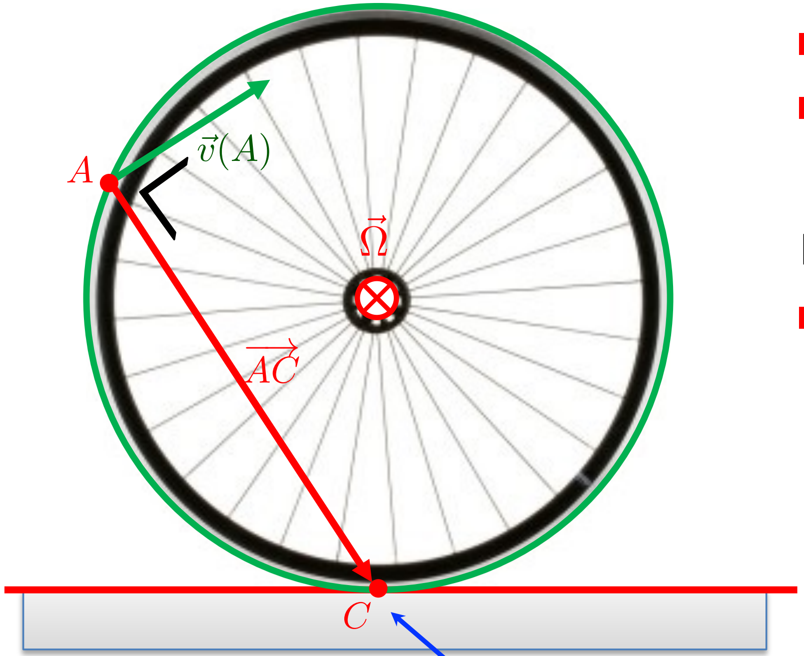
$$|\vec{\Omega} \times \overrightarrow{GP}| = \Omega R = |\vec{v}(G)| \quad \forall P \in \text{pneu}$$

$$|\vec{v}(P_1)| = 2\,|\vec{v}_G| \qquad |\vec{v}(P_2)| = |\vec{v}(P_4)| = \sqrt{2}\,|\vec{v}_G|$$

$$|\vec{v}(P_3)| = 0$$

Condition de non-glissement:
la vitesse du point de la roue en contact avec le sol est nulle

Roue de vélo sur un plan sans glissement.



- Base : circonférence du pneu
- Roulante: 'trace' du pneu sur le sol

Pour trouver le centre instantané de rotation

- Si on connaît la vitesse d'un point A et $\vec{\Omega}$

$$\vec{v}(C) = \vec{v}(A) + \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\vec{v}(A) = -\left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}(A) = -\vec{\Omega}\underbrace{\left(\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{AC}\right)}_{=0} + \overrightarrow{AC}\,\Omega^2$$

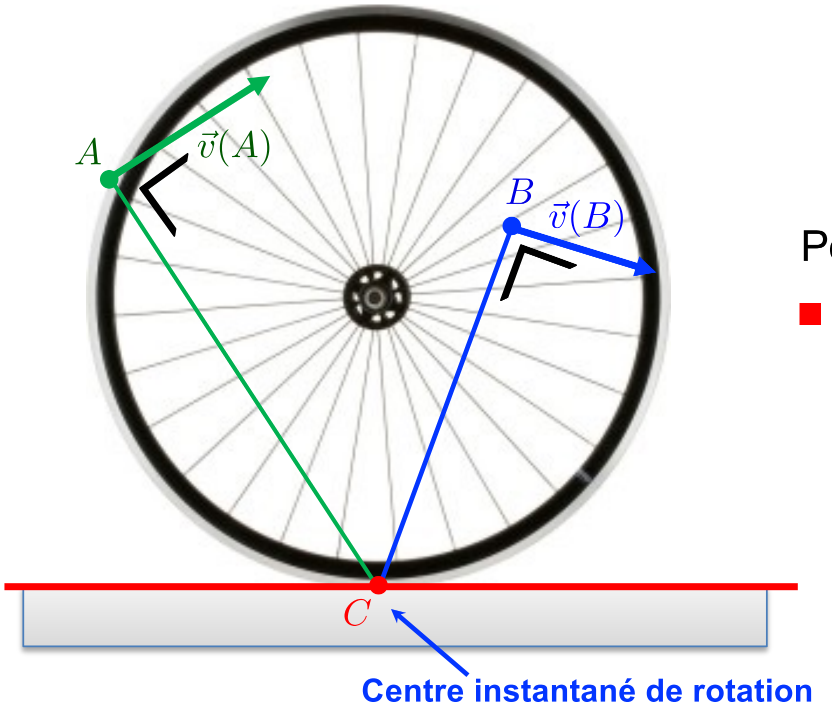
$$\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{v}(A)}{\Omega^2}$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Mouvement plan-sur-plan

Roue de vélo sur un plan sans glissement.



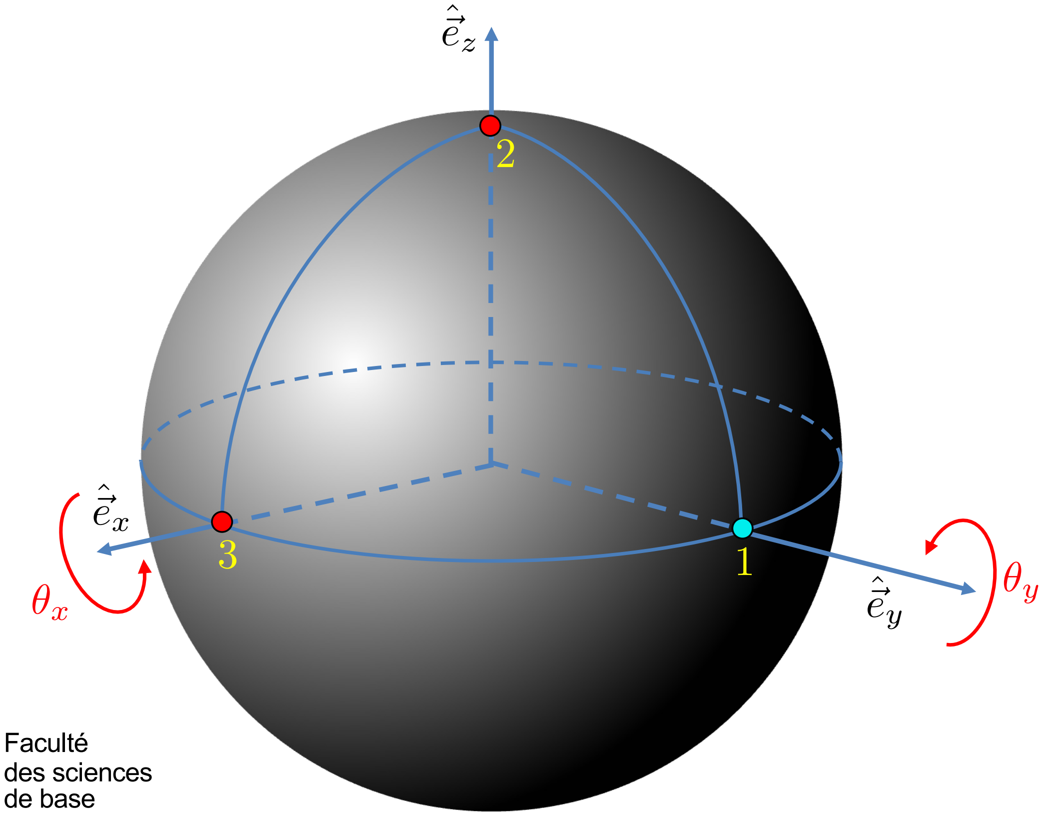
Pour trouver le centre instantané de rotation

- Si on connaît la vitesse de deux points A et B, mais pas $\vec{\Omega}$

  Le centre de rotation se trouve à l'intersection des droites passant par A et B et respectivement perpendiculaires à $\vec{v}(A)$ et $\vec{v}(B)$

Formule de composition des rotations pour un solide

Les rotations d'anges finis ne commutent pas



Soit deux rotations d'angles θ_x = 90° et θ_y = 90° Autour des axes $\hat{\vec{e}}_x$ et $\hat{\vec{e}}_y$ respectivement.

Dans l'ordre (θ_x, θ_y) le point bleu initialement en position 1 est amené en position 3.

Dans l'ordre (θ_y, θ_x) Le point bleu reste inaffecté par la rotation θ_y et se retrouve en 2 après la rotation θ_x .

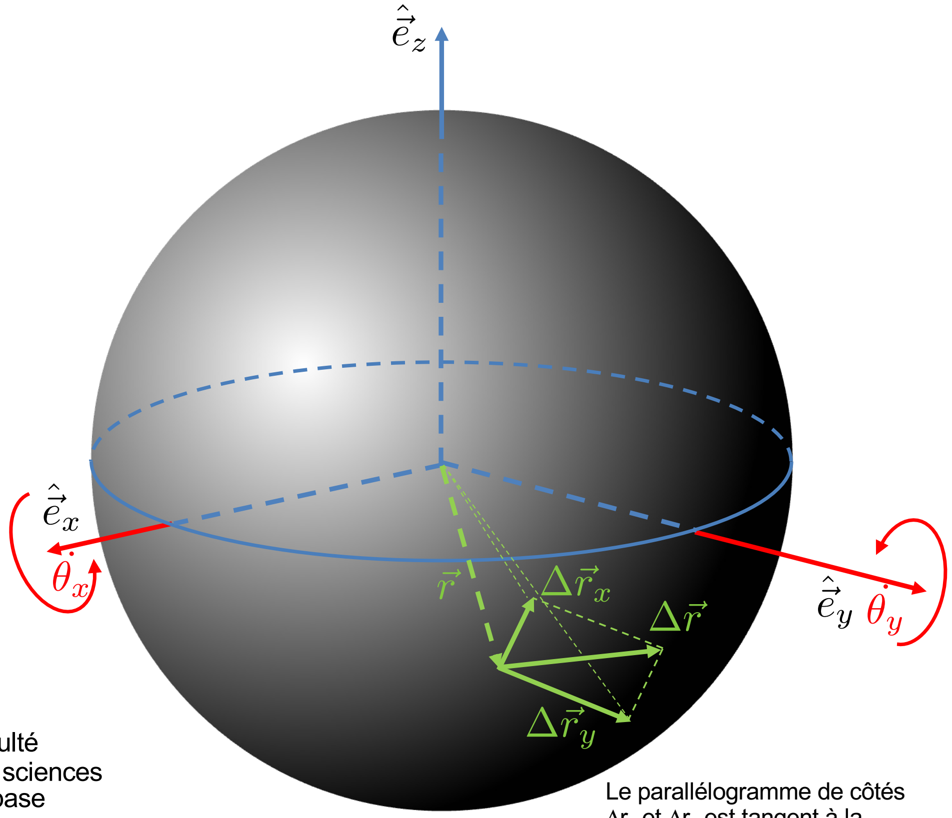
➔ Les rotations ne commutent pas (l'ordre des rotations est important)

La situation est différente avec des rotations infinitésimales

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Les rotations infinitésimales commutent



Le parallélogramme de côtés Δr_x et Δr_y est tangent à la sphère

On considère des rotations infinitésimales de vecteurs $\vec{\dot{\theta}}_x = \dot{\theta}_x \hat{\vec{e}}_x$ et $\vec{\dot{\theta}}_y = \dot{\theta}_y \hat{\vec{e}}_y$ telles que

$$\frac{\Delta\vec{\theta}_x}{\Delta t} = \vec{\dot{\theta}}_x, \quad \frac{\Delta\vec{\theta}_y}{\Delta t} = \vec{\dot{\theta}}_y$$

En utilisant la formule de Poisson, l'effet des rotations est:

$$\Delta\vec{r}_x = \vec{\dot{\theta}}_x \Delta t \times \vec{r} \qquad \Delta\vec{r}_y = \vec{\dot{\theta}}_y \Delta t \times \vec{r}$$

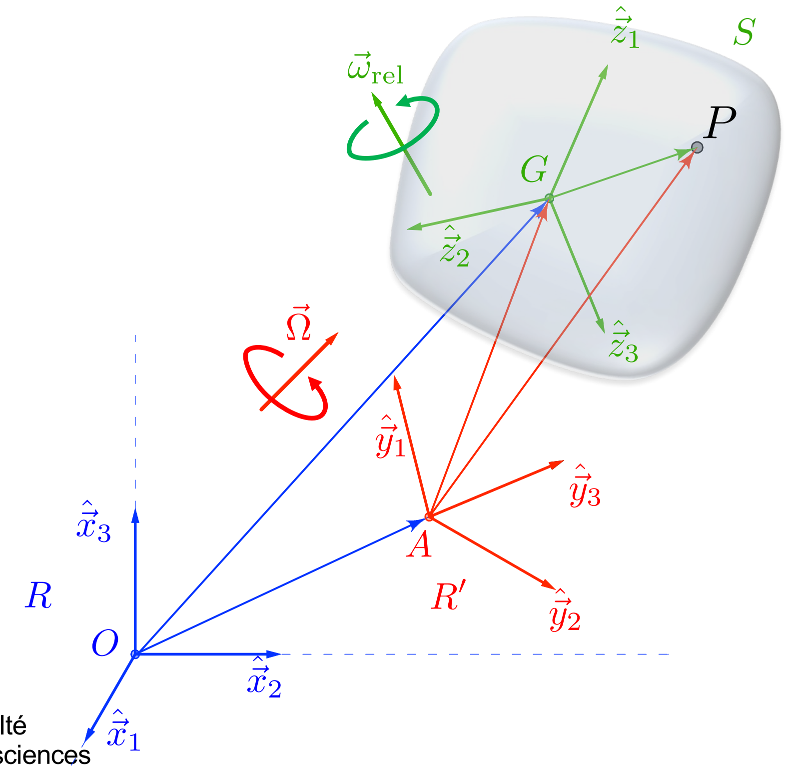
L'effet combiné est indépendant de l'ordre des rotations

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y = \left[(\vec{\dot{\theta}}_x + \vec{\dot{\theta}}_y)\Delta t\right] \times \vec{r}$$

Les deux rotations infinitésimales peuvent être assimilées à une rotation de vecteur

$$\boxed{\vec{\dot{\theta}} = \vec{\dot{\theta}}_x + \vec{\dot{\theta}}_y}$$

Formule de composition des rotations pour un solide



On considère un référentiel S défini par 4 points d'un solide (p.ex. le centre de masse G et les extrémités de trois vecteurs définissant un rèpère orthonormé), en rotation de vecteur $\vec{\omega}_{\mathrm{rel}}$ par rapport à un référentiel R' muni d'un système de coordonnées $\left(A, \hat{\vec{y}}_1, \hat{\vec{y}}_2, \hat{\vec{y}}_3\right)$, lui-même en rotation de vecteur $\vec{\Omega}$ par rapport au référentiel R du laboratoire (d'inertie) muni du système de coordonnées $\left(O, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3\right)$

Quel est le vecteur de rotation du solide par rapport au référentiel R ?

La composition de deux rotations de vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}_{\mathrm{rel}}$ est une rotation de vecteur

$$\vec{\Omega} + \vec{\omega}_{\mathrm{rel}}$$

⚠ $\left(G, \hat{\vec{z}}_1, \hat{\vec{z}}_2, \hat{\vec{z}}_3\right)$ **n'est PAS le référentiel du CM car il est en rotation par rapport à R**

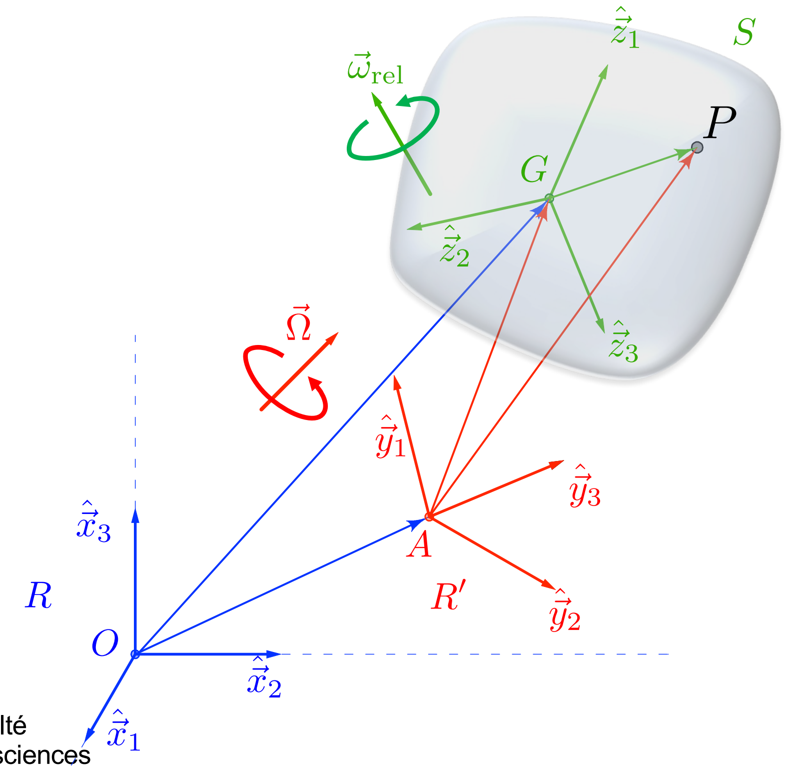
Deux manières alternatives de démontrer la formula de composition des rotations.

(On peut aussi directement aller à la slide 31 si on est déjà convaincu par le résultat)

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Formule de composition des rotations pour un solide (manière 1)



On considère un référentiel S défini par 4 points d'un solide (p.ex. le centre de masse G et les extrémités de trois vecteurs définissant un rèpère orthonormé), en rotation de vecteur $\vec{\omega}_{\mathrm{rel}}$ par rapport à un référentiel R' muni d'un système de coordonnées $\left(A, \hat{\vec{y}}_1, \hat{\vec{y}}_2, \hat{\vec{y}}_3\right)$, lui-même en rotation de vecteur $\vec{\Omega}$ par rapport au référentiel R du laboratoire (d'inertie) muni du système de coordonnées $\left(O, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3\right)$

Quel est le vecteur de rotation du solide par rapport au référentiel R ?

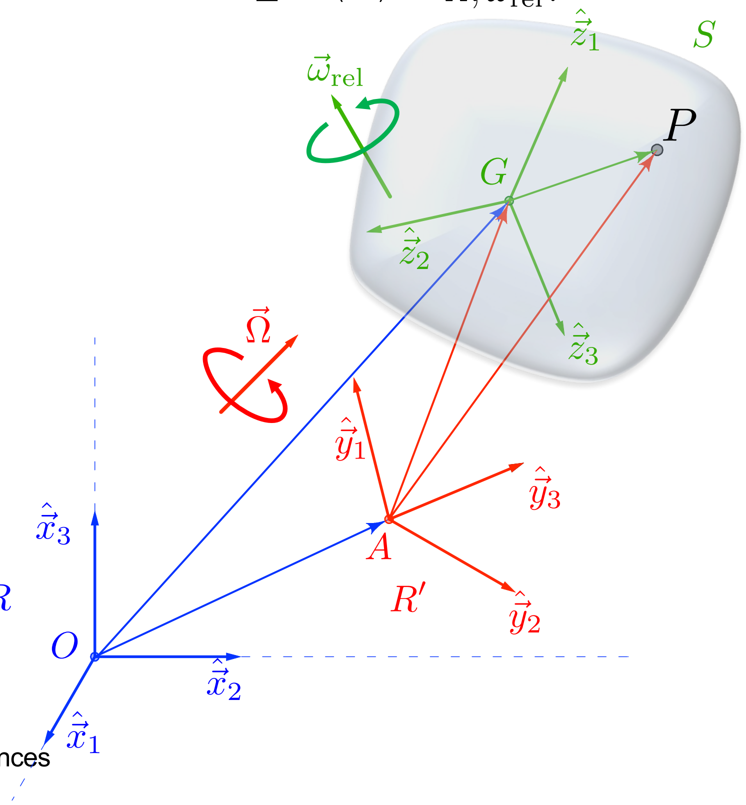
On utilise l'indice R, R' ou S selon le référentiel dans lequel la vitesse est évaluée.

⚠ $\left(G, \hat{\vec{z}}_1, \hat{\vec{z}}_2, \hat{\vec{z}}_3\right)$ **n'est PAS le référentiel du CM car il est en rotation par rapport à R**

Formule de composition des rotations pour un solide (manière 1)

- But: Ecrire $\vec{v}_{\rm R}(P) = \vec{v}_{\rm R}(G) + \left(\vec{\Xi} \wedge \overrightarrow{GP}\right)$

$$\vec{\Xi} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\Omega}, \vec{\omega}_{\rm rel}?$$



- La vitesse de P évaluée dans le référentiel R' est :

$$\vec{v}_{\rm R'}(P) = \vec{v}_{\rm R'}(G) + \underbrace{\vec{v}_{\rm S}(P)}_{=0} + \left(\vec{\omega}_{\rm rel} \wedge \overrightarrow{GP}\right)$$

$$\vec{v}_{\rm R'}(P) = \vec{v}_{\rm R'}(G) + \left(\vec{\omega}_{\rm rel} \wedge \overrightarrow{GP}\right) \qquad ①$$

- Et la vitesse de P évaluée dans le référentiel R est:

$$\vec{v}_{\rm R}(P) = \vec{v}_{\rm R}(A) + \underbrace{\vec{v}_{\rm R'}(P)}_{\neq 0} + \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \qquad ②$$

- On utilise encore la vitesse de G dans le référentiel R:

$$\vec{v}_{\rm R}(G) = \vec{v}_{\rm R}(A) + \vec{v}_{\rm R'}(G) + \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right)$$

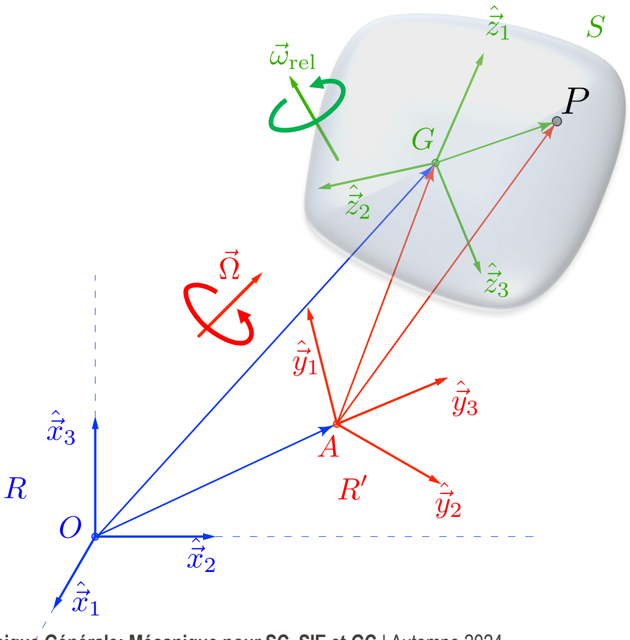
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{\rm R'}(G) = \vec{v}_{\rm R}(G) - \vec{v}_{\rm R}(A) - \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right) \qquad ③$$

Formule de composition des rotations pour un solide (manière 1)

On réécrit ② en y remplaçant ① et ③, en utilisant également: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}$

$$\vec{v}_{\mathrm{R}}(P) = \vec{v}_{\mathrm{R}}(A) + \vec{v}_{\mathrm{R}}(G) - \vec{v}_{\mathrm{R}}(A) - \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GP}\right) + \left(\vec{\omega}_{\mathrm{rel}} \wedge \overrightarrow{GP}\right)$$

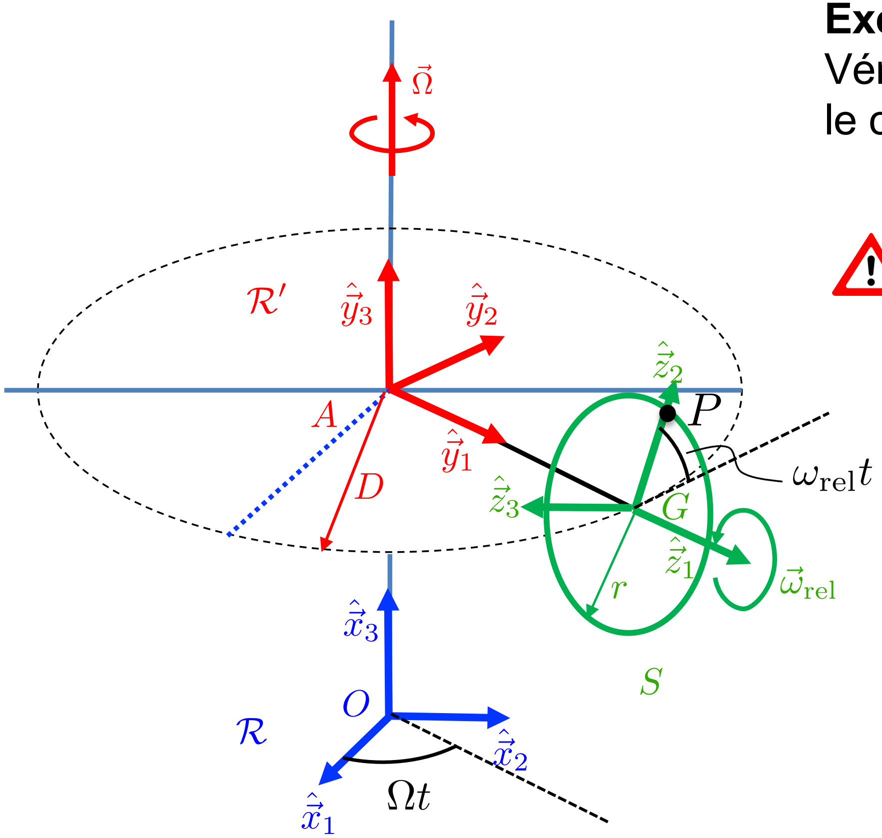
$$\vec{v}_{\mathrm{R}}(P) = \vec{v}_{\mathrm{R}}(G) + \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GP}\right) + \left(\vec{\omega}_{\mathrm{rel}} \wedge \overrightarrow{GP}\right) = \vec{v}_{\mathrm{R}}(G) + \left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}_{\mathrm{rel}}\right) \wedge \overrightarrow{GP}$$



La composition de deux rotations de vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}_{\mathrm{rel}}$ est une rotation de vecteur

$$\vec{\Omega} + \vec{\omega}_{\mathrm{rel}}$$

Formule de composition des rotations pour un solide (manière 2)



Exercice:
Vérifier la formule de composition des vitesses dans le cas décrit sur la figure ci-contre.

⚠ **Utilisez un seul repère pour écrire les différents vecteurs**

Formule de composition des rotations pour un solide (manière 2)

- **1ère méthode:** On exprime directement la position et la vitesse du point P

$$\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}(t) + \overrightarrow{GP}(t)$$

$$\overrightarrow{AG}(t) = D\,\cos(\Omega t)\,\hat{\vec{x}}_1 + D\,\sin(\Omega t)\,\hat{\vec{x}}_2$$

$$\frac{d\overrightarrow{AG}(t)}{dt} = -D\,\Omega\,\sin(\Omega t)\,\hat{\vec{x}}_1 + D\,\Omega\,\cos(\Omega t)\,\hat{\vec{x}}_2 = \frac{d\overrightarrow{OG}(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GP}(t) = \quad & -r\,\cos(\omega_{\text{rel}}t)\,\sin(\Omega t) \quad \hat{\vec{x}}_1 \\ & +r\,\cos(\omega_{\text{rel}}t)\,\cos(\Omega t) \quad \hat{\vec{x}}_2 \\ & +r\,\sin(\omega_{\text{rel}}t) \quad \hat{\vec{x}}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{GP}(t)}{dt} = \quad & (+r\,\omega_{\text{rel}}\,\sin(\omega_{\text{rel}}t)\,\sin(\Omega t) - r\,\Omega\,\cos(\omega_{\text{rel}}t)\,\cos(\Omega t)) \quad \hat{\vec{x}}_1 \\ & (-r\,\omega_{\text{rel}}\,\sin(\omega_{\text{rel}}t)\,\cos(\Omega t) - r\,\Omega\,\cos(\omega_{\text{rel}}t)\,\sin(\Omega t)) \quad \hat{\vec{x}}_2 \\ & +r\,\omega_{\text{rel}}\,\cos(\omega_{\text{rel}}t) \quad \hat{\vec{x}}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt} = \quad & -D\,\Omega\,\sin(\Omega t) + (+r\,\omega_{\text{rel}}\,\sin(\omega_{\text{rel}}t)\,\sin(\Omega t) - r\,\Omega\,\cos(\omega_{\text{rel}}t)\,\cos(\Omega t)) \quad \hat{\vec{x}}_1 \\ & +D\,\Omega\,\cos(\Omega t) + (-r\,\omega_{\text{rel}}\,\sin(\omega_{\text{rel}}t)\,\cos(\Omega t) - r\,\Omega\,\cos(\omega_{\text{rel}}t)\,\sin(\Omega t)) \quad \hat{\vec{x}}_2 \\ & +r\,\omega_{\text{rel}}\,\cos(\omega_{\text{rel}}t) \quad \hat{\vec{x}}_3\end{aligned}$$

Formule de composition des rotations pour un solide (manière 2)

- **2ème méthode:** On utilise la formule de composition des vitesses:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\Omega} = \Omega\,\hat{\vec{x}}_3 \\ &\vec{\omega}_{\text{rel}} = \omega_{\text{rel}}\,\cos(\Omega t)\,\hat{\vec{x}}_1 + \omega_{\text{rel}}\,\sin(\Omega t)\,\hat{\vec{x}}_2 \end{aligned}\right\} \quad \vec{\Omega} + \vec{\omega}_{\text{rel}} = \omega_{\text{rel}}\,\cos(\Omega t)\,\hat{\vec{x}}_1 + \omega_{\text{rel}}\,\sin(\Omega t)\,\hat{\vec{x}}_2 + \Omega\,\hat{\vec{x}}_3$$

$$\left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}_{\text{rel}}\right) \wedge \overrightarrow{GP} = \begin{vmatrix} \hat{\vec{x}}_1 & \omega_{\text{rel}}\,\cos(\Omega t) & -r\,\cos(\omega_{\text{rel}} t)\,\sin(\Omega t) \\ \hat{\vec{x}}_2 & \omega_{\text{rel}}\,\sin(\Omega t) & +r\,\cos(\omega_{\text{rel}} t)\,\cos(\Omega t) \\ \hat{\vec{x}}_3 & \Omega & +r\,\sin(\omega_{\text{rel}} t) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{OG}(t)}{dt} + \left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}_{\text{rel}}\right) \wedge \overrightarrow{GP} = \quad & -D\,\Omega\,\sin(\Omega t) + (+r\,\omega_{\text{rel}}\,\sin(\omega_{\text{rel}} t)\,\sin(\Omega t) - r\,\Omega\,\cos(\omega_{\text{rel}} t)\,\cos(\Omega t)) \quad \hat{\vec{x}}_1 \\ & +D\,\Omega\,\cos(\Omega t) + (-r\,\omega_{\text{rel}}\,\sin(\omega_{\text{rel}} t)\,\cos(\Omega t) - r\,\Omega\,\cos(\omega_{\text{rel}} t)\,\sin(\Omega t)) \quad \hat{\vec{x}}_2 \\ & +r\,\omega_{\text{rel}}\,\cos(\omega_{\text{rel}} t) \quad \hat{\vec{x}}_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OG}(t)}{dt} + \left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}_{\text{rel}}\right) \wedge \overrightarrow{GP}}$$

OK !

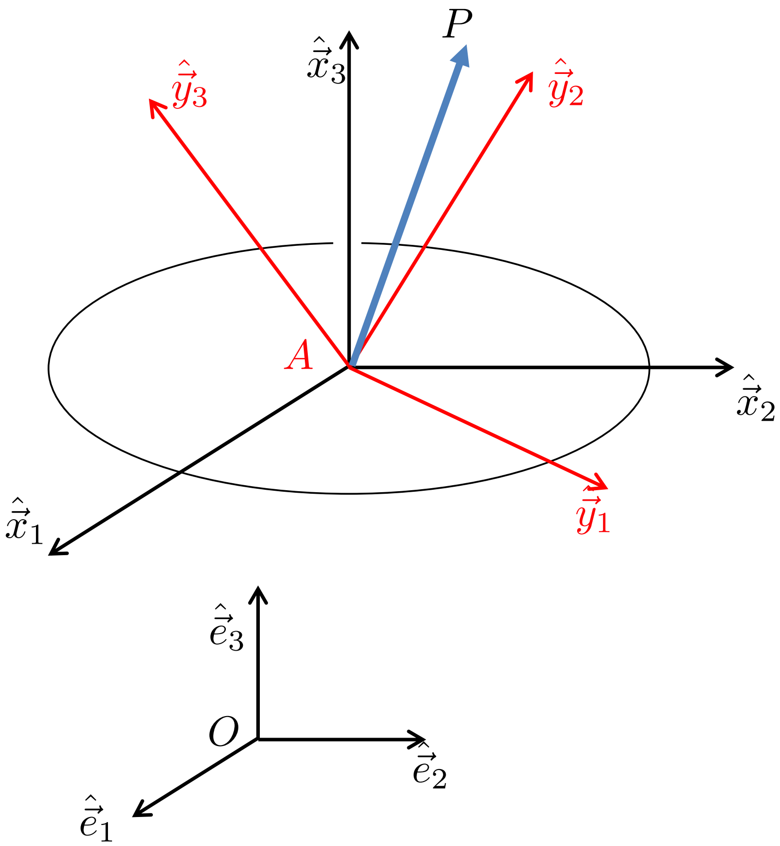
Annexe:

Paramétrisation de la position et de la vitesse de n’importe quel point P d’un solide. Angles d’Euler.

Faculté
des sciences
de base

Swiss
Plasma
Center

Annexe: Paramétrisation de la position et de la vitesse de n'importe quel point P d'un solide. Angles d'Euler.



- Repère lié au référentiel: $(O, \hat{\vec{e}}_1, \hat{\vec{e}}_2, \hat{\vec{e}}_3)$
- Repère lié au solide: $(A, \hat{\vec{y}}_1, \hat{\vec{y}}_2, \hat{\vec{y}}_3)$
- Repère$(A, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3)$ tel que $\hat{\vec{x}}_i \parallel \hat{\vec{e}}_i$
- $A, P \in \text{solide}$

$$\overrightarrow{OA} = \sum_i A_i\, \hat{\vec{e}}_i$$

$$\overrightarrow{AP} = \sum_i P_i\, \hat{\vec{y}}_i \quad \text{avec} \quad P_i = \text{cste}$$

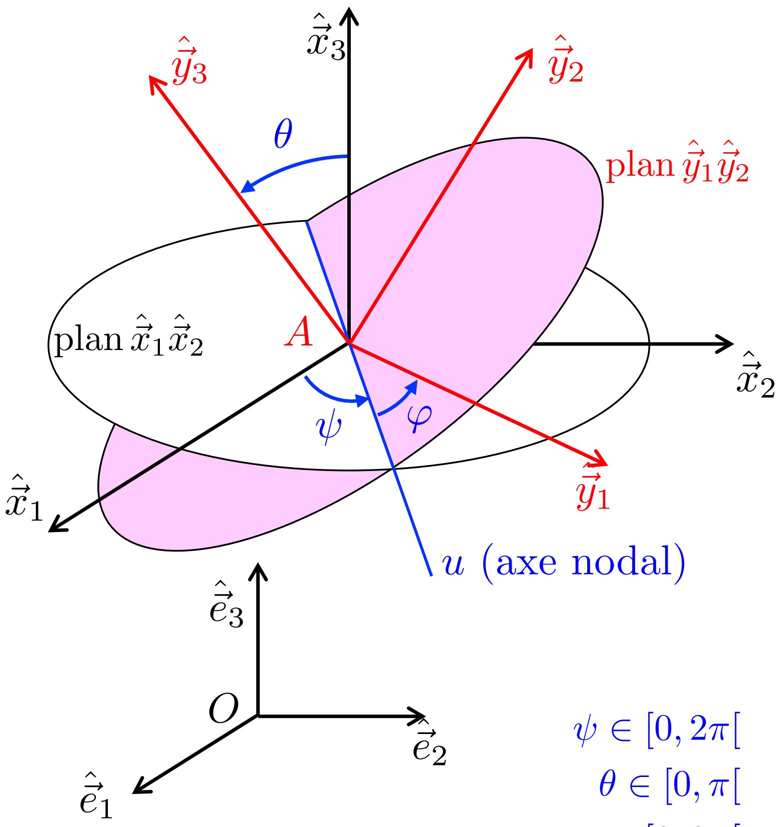
- But: déterminer $\vec{\omega}$ tel que:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}\right)$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Position d'un solide: Angles d'Euler



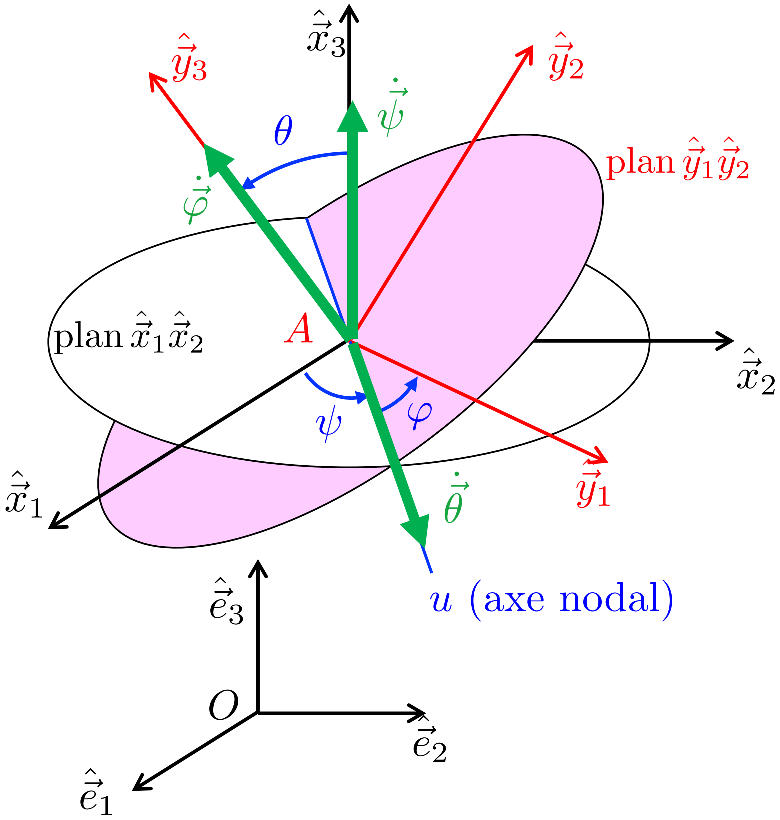
$\psi \in [0, 2\pi[$

$\theta \in [0, \pi[$

$\varphi \in [0, 2\pi[$

- La position du solide nécessite la connaissance de **6 paramètres**. Par exemple:
  - les trois coordonnées du point A dans le repère $(O, \hat{\vec{e}}_1, \hat{\vec{e}}_2, \hat{\vec{e}}_3)$
  - l'orientation du repère $(A, \hat{\vec{y}}_1, \hat{\vec{y}}_2, \hat{\vec{y}}_3)$ par rapport au repère $(A, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3)$ qui peut être caractérisée par les **angles d'Euler**
  - on passe de $(A, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3)$ à $(A, \hat{\vec{y}}_1, \hat{\vec{y}}_2, \hat{\vec{y}}_3)$ par les trois rotations successives suivantes: (ψ, θ, φ)
    - Rotation d'angle ψ autour de l'axe $\hat{\vec{x}}_3$ amenant $\hat{\vec{x}}_1$ sur u (appelé axe nodal)
    - Rotation d'angle θ autour de l'axe u amenant $\hat{\vec{x}}_3$ sur $\hat{\vec{y}}_3$
    - Rotation d'angle φ autour de l'axe $\hat{\vec{y}}_3$ amenant u sur $\hat{\vec{y}}_1$

Rotation du solide en fonction des angles d'Euler



- Le mouvement de rotation du solide est la composition de 3 rotations:
  - Rotation autour de l'axe $\vec{x}_3$ avec la vitesse angulaire $\dot{\psi}$
  - Rotation autour de l'axe nodal u de vitesse angulaire $\dot{\theta}$
  - Rotation autour de l'axe $\vec{y}_3$ de vitesse angulaire $\dot{\varphi}$

  - Le vecteur de rotation instantané est donc:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{x}_3 + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{y}_3 = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}}$$

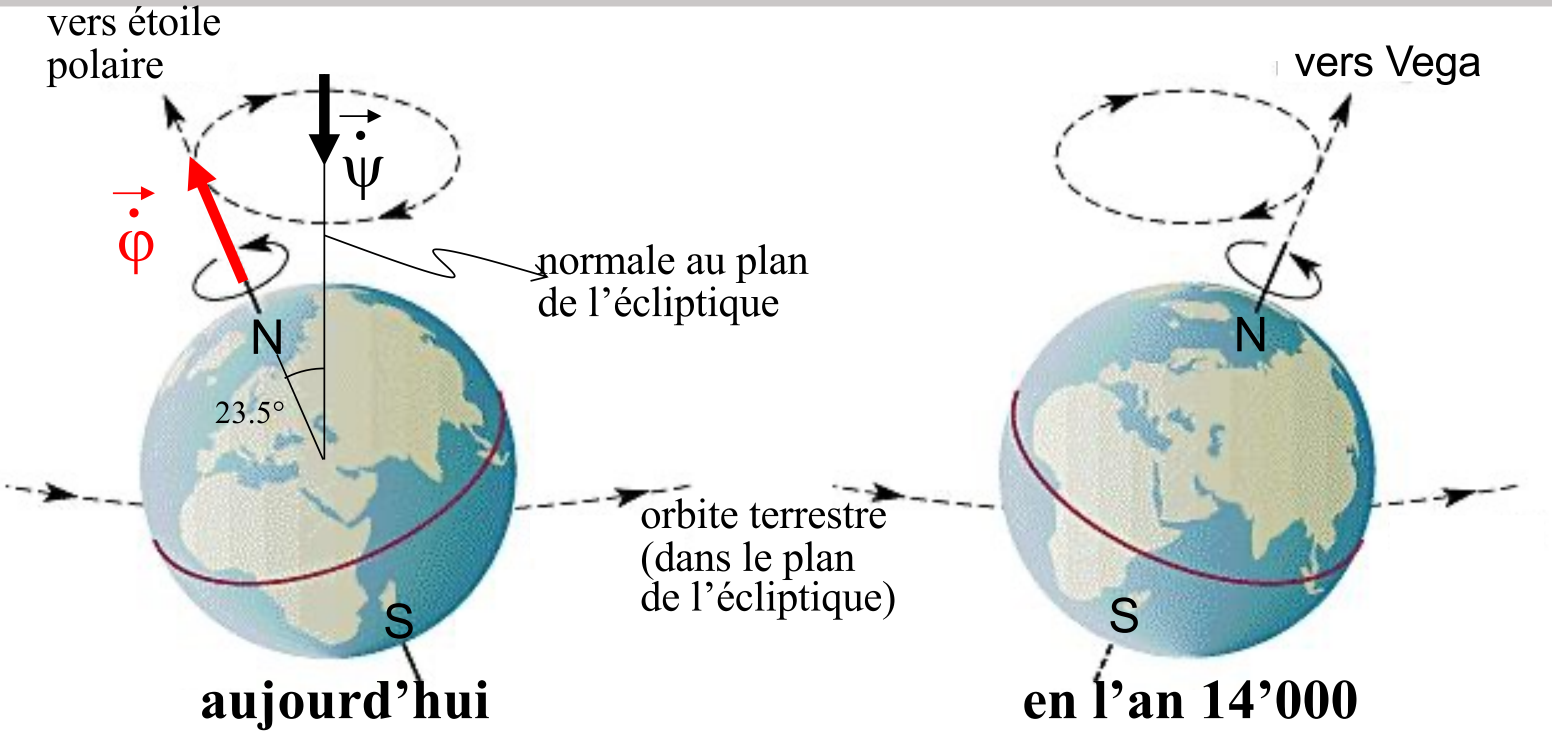
Définitions:

$\dot{\vec{\psi}}$: Vitesse angulaire de **précession**

$\dot{\vec{\theta}}$: Vitesse angulaire de **nutation**

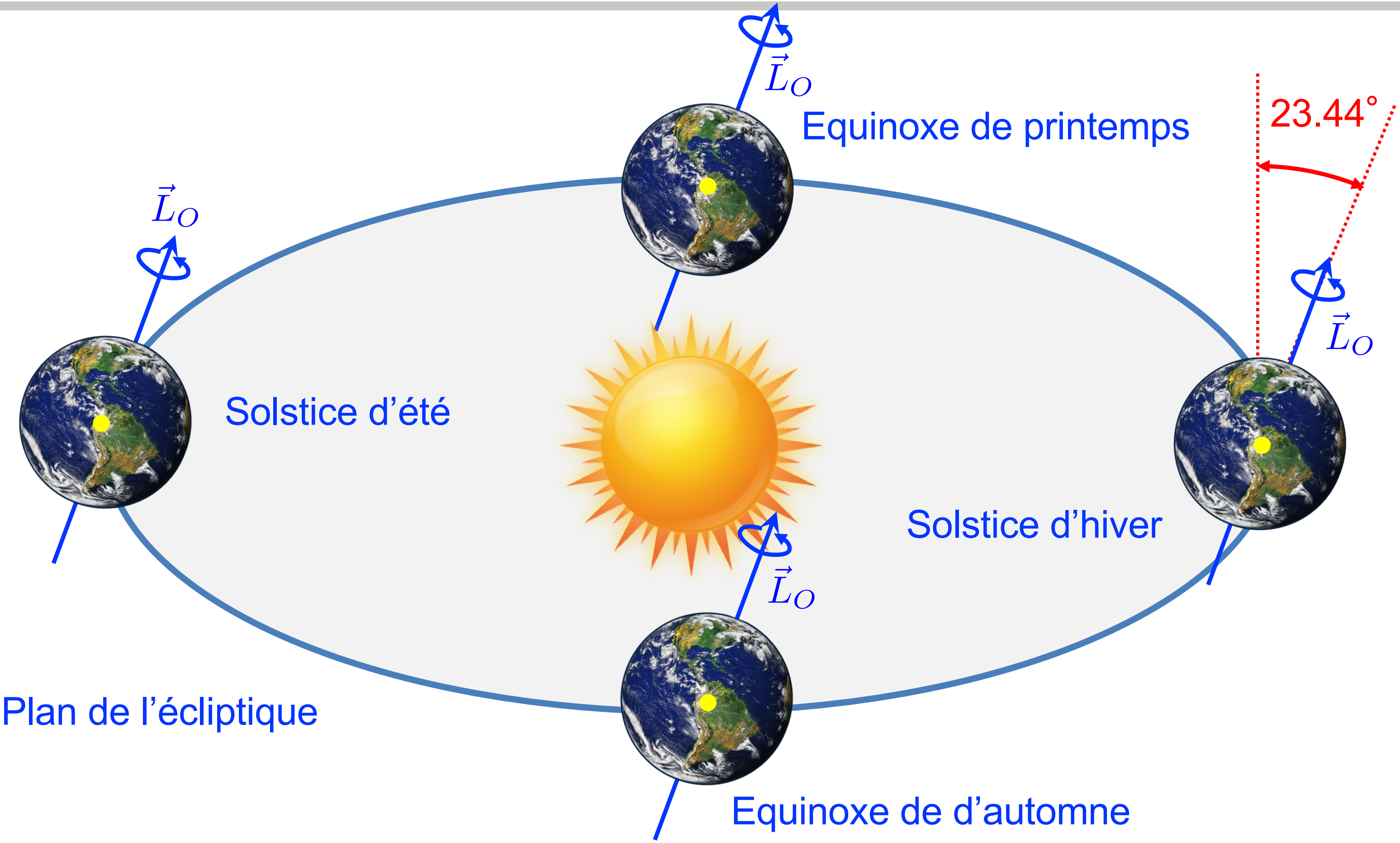
$\dot{\vec{\varphi}}$: Vitesse angulaire de **rotation propre**

Illustration du mouvement d'un solide: Précession des équinoxes



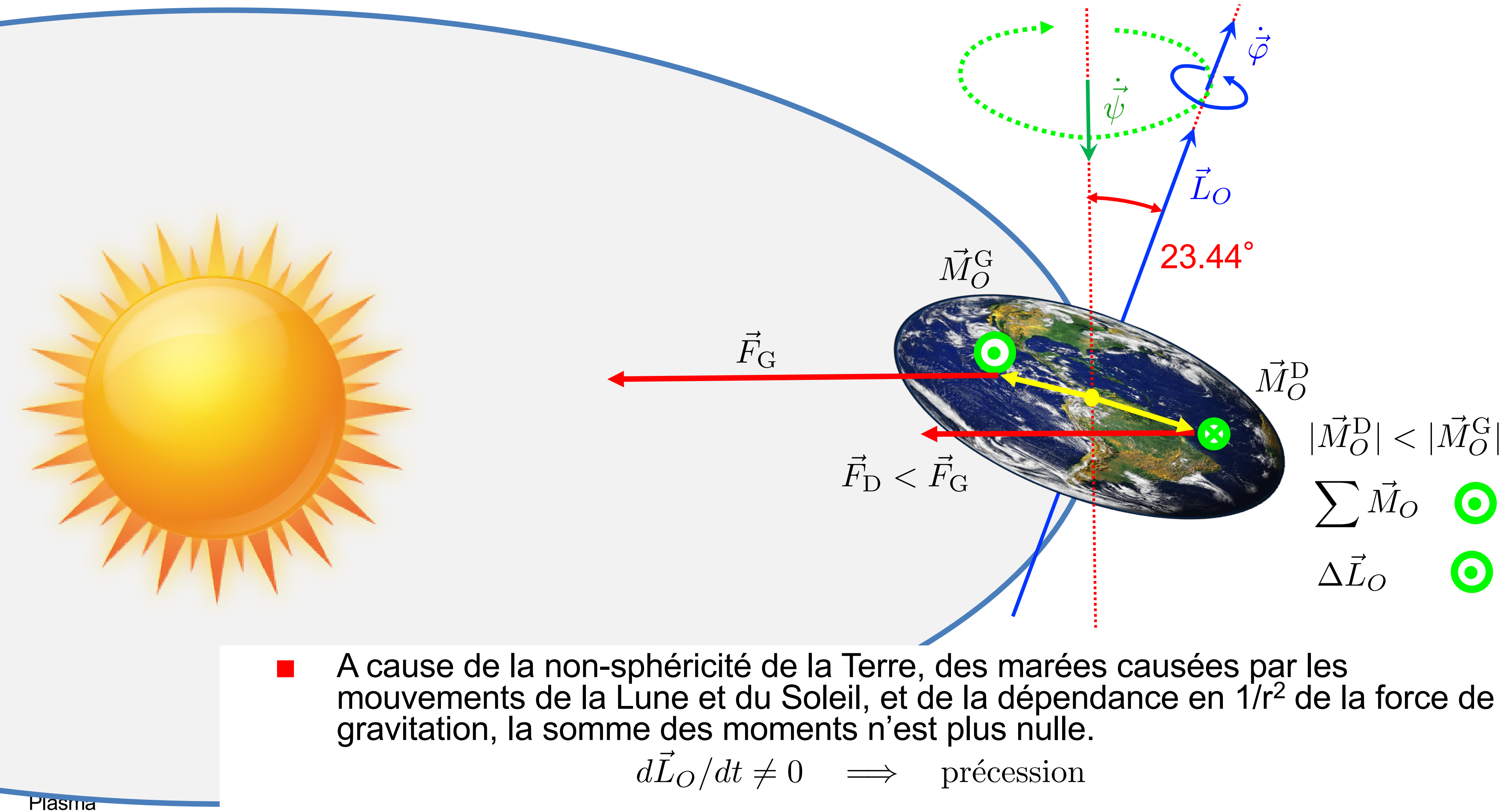
- Mise en évidence déjà par Hipparque (~ 135 av. J-C):
  - La position du Soleil à l'équinoxe de printemps se déplace par rapport aux étoiles fixes de 1.5° par siècle
- Précession de l'axe de rotation de la Terre autour de la normale au plan de l'écliptique: période ~ 26'000 ans
- Egalement petite nutation de 9.2" d'arc: période ~19 ans

Mouvement de la terre autour du soleil



- En première approximation (terre de forme sphérique et densité homogène), la somme des moments des forces exercées par le Soleil par rapport au centre de la Terre est nulle: $d\vec{L}_O/dt = 0$

Origine de la précession des équinoxes



- A cause de la non-sphéricité de la Terre, des marées causées par les mouvements de la Lune et du Soleil, et de la dépendance en $1/r^2$ de la force de gravitation, la somme des moments n’est plus nulle.

$$d\vec{L}_O/dt \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{précession}$$

Cinématique du solide: résumé (1)

- Centre de masse d'un solide:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\, dm(\vec{r}) = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,\rho(\vec{r})\; dV$$

- Elément de volume infinitésimal:
  - Coordonnées cartésiennes: $dV = dx\,dy\,dz$
  - Coordonnées cylindriques: $dV = r d\theta\,dr\,dz$
  - Coordonnées sphériques: $dV = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

- Vitesse absolue de tout point P du solide, exprimée dans le référentiel d'inertie R:

$$\vec{v}_a(P) = \vec{v}_a(A) + \left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{AP}\right) \qquad A, P \in \text{solide}$$

$$\vec{v}_a(P) = \vec{v}_a(G) + \left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{GP}\right) \qquad G \text{ :centre de masse}$$

Cinématique du solide: résumé (2)

- Accélération absolue de tout point P du solide, exprimée dans le référentiel d'inertie R:

$$\vec{a}_a(P) = \vec{a}_a(A) + \left(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP})\right) + \left(\dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{AP}\right)$$

$$\vec{a}_a(P) = \vec{a}_a(G) + \left(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{GP})\right) + \left(\dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{GP}\right)$$

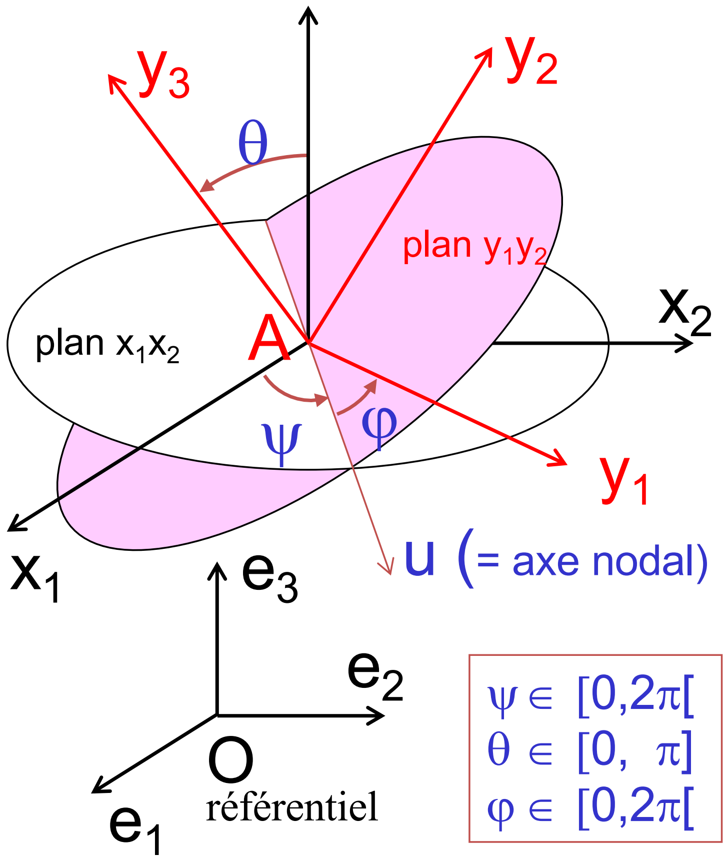
- **Mouvement plan-sur-plan:** Mouvement tel qu'un plan du solide Σ reste à tout moment parallèle à un plan fixe π du référentiel. Pour un tel mouvement il existe un centre de rotation.

- **Condition de non-glissement** (pour une roue)**:** la vitesse du point de la roue en contact avec le sol est nulle

- La composition de deux rotations de vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}_{\text{rel}}$ est une rotation de vecteur

$$\vec{\Omega} + \vec{\omega}_{\text{rel}}$$

Cinématique du solide: résumé (3)



ψ ∈ [0,2π[
θ ∈ [0, π]
φ ∈ [0,2π[

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\hat{\vec{x}}_3 + \dot{\theta}\,\hat{\vec{u}} + \dot{\varphi}\,\hat{\vec{y}}_3 = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}}$$

$\dot{\vec{\psi}}$: Vitesse angulaire de précession

$\dot{\vec{\theta}}$: Vitesse angulaire de nutation

$\dot{\vec{\varphi}}$: Vitesse angulaire de rotation propre